ÉQUATIONS INÉQUATIONS

Ph DEPRESLE

15 octobre 2016

Table des matières

1 Résolution d'équations **2**
1.1 Equation-produit 2
1.2 Équation de la forme $x^2 = a$ 2
1.2.1 Exemples 2
1.2.2 Cas général 2
1.3 Equation-quotient 3

2 Résolution d'inéquations **3**
2.1 Détermination du signe de $ax + b$ 3
2.2 Détermination du signe d'un produit 4
2.3 Détermination du signe d'un quotient 4

3 Les exercices **6**

4 Les exercices corrigés **7**

1 Résolution d'équations

1.1 Equation-produit

Définition 1. *Toute équation du type $A(x).B(x) = 0$ où $A(x)$ et $B(x)$ sont des expressions algébriques est appelé équation-produit.*

Propriétés 1. *Pour qu'un produit de facteurs soit nul il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul.*

Exemple : Résoudre $(2x-6)(-x+7) = 0$

$$\begin{aligned}(2x-6)(-x+7) = 0 &\iff 2x-6 = 0 \text{ ou } -x+7 = 0\\ &\iff 2x = 6 \text{ ou } -x = -7\\ &\iff x = 3 \text{ ou } x = 7\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont 3 et 7. On note $S = \{3;7\}$

1.2 Équation de la forme $x^2 = a$

1.2.1 Exemples

Résoudre :

$$\begin{aligned}(x+1)^2 = 7 &\iff (x+1)^2 - 7 = 0\\ &\iff (x+1+\sqrt{7})(x+1-\sqrt{7}) = 0\\ &\iff x = -1-\sqrt{7} \text{ ou } x = -1+\sqrt{7}\end{aligned}$$

.

$$\begin{aligned}(2x-1)^2 = (5-x)^2 &\iff (2x-1)^2 - (5-x)^2 = 0\\ &\iff (2x-1+5-x)(2x-1-5+x) = 0\\ &\iff (x+4)(3x-6) = 0\\ &\iff x = -4 \text{ ou } x = 2\end{aligned}$$

1.2.2 Cas général

Résolution de l'équation $x^2 = a, \quad a \in \mathbb{R}$:

- si $a < 0$ l'équation n'a pas de solutions : $S = \emptyset$
- si $a = 0$ l'équation a une unique solution : $S = \{0\}$
- si $a > 0$ l'équation a deux solutions : $S = \{\sqrt{a}; -\sqrt{a}\}$

Exemple : Les équations précédentes peuvent aussi se résoudre ainsi :

$$\begin{aligned}(x+1)^2 = 7 &\iff x+1 = \sqrt{7} \text{ ou } x+1 = -\sqrt{7}\\ &\iff \left\{\begin{array}{c} x = -1+\sqrt{7}\\ \text{ou}\\ x = -1-\sqrt{7}\end{array}\right.\end{aligned}$$

$$(2x-1)^2 = (5-x)^2 \iff 2x-1 = 5-x \text{ ou } 2x-1 = -5+x$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{c} x = 2 \\ \text{ou} \\ x = -4 \end{array} \right.$$

Remarque : $A^2 = B^2 \iff \left\{ \begin{array}{c} A = B \\ \text{ou} \\ A = -B \end{array} \right.$

1.3 Equation-quotient

Définition 2. *Toute équation du type* $\dfrac{A(x)}{B(x)} = 0$ *où* $A(x)$ *et* $B(x)$ *sont des expressions algébriques avec* $B(x) \neq 0$ *est appelé équation-quotient.*

Propriétés 2. *Pour tout* x *n'annulant pas* $B(x)$*, l'équation* $\dfrac{A(x)}{B(x)} = 0$ *équivaut é* $A(x) = 0$.

Exemple : Résoudre $\dfrac{(2x-6)}{(-x+7)} = 0$

$$\frac{(2x-6)}{(-x+7)} = 0 \iff 2x-6 = 0 \text{ et } -x+7 \neq 0$$
$$\iff 2x = 6 \text{ et } -x \neq -7$$
$$\iff x = 3 \text{ et } x \neq 7$$

La solution de l'équation est 3. On note $S = \{3\}$

2 Résolution d'inéquations

2.1 Détermination du signe de $ax+b$

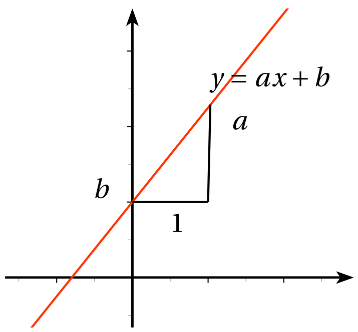
Définition 3. *a et b étant deux réels*
$f : x \mapsto ax+b$*, est une fonction affine de coefficient directeur* a*. Sa courbe représentative est la droite d'équation* $y = ax+b$*.*
Si $a = 0$ f *est une fonction constante.*

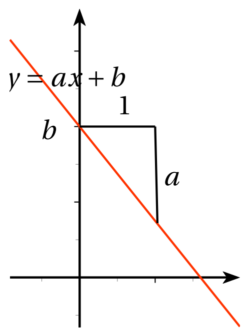
Si $a > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax+b$	$\nearrow$	

Si $a < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax+b$	$\searrow$	





x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$-$	0	$+$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$+$	0	$-$

Exemple : Déterminer le signe de $-4x+8$

$-4x+8=0 \iff x=2$. On a donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Signe de $-4x+8$	$+$	0	$-$

2.2 Détermination du signe d'un produit

Exemple : Étudier le signe de $(2x-8)(-x-5)$

$2x-8=0 \iff x=4$

$-x-5=0 \iff x=-5$

On a donc :

x	$-\infty$		-5		4		$+\infty$
$2x-8$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x-5$		$+$	0	$-$		$-$	
$(2x-8)(-x-5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$(2x-8)(-x-5) \geqslant 0$ pour $x \in [-5;4]$

$(2x-8)(-x-5) \leqslant 0$ pour $x \in]-\infty;-5] \cup [4;+\infty[$

2.3 Détermination du signe d'un quotient

Exemple : Étudier le signe de $\dfrac{(2x-8)}{(-x-5)}$

$2x-8=0 \iff x=4$

$-x-5 \neq 0 \iff x \neq -5$

On a donc :

x	$-\infty$		-5		4		$+\infty$
$2x-8$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x-5$		$+$	0	$-$		$-$	
$\dfrac{(2x-8)}{(-x-5)}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$(2x-8)(-x-5) \geqslant 0$ pour $x \in]-5;4]$
$(2x-8)(-x-5) \leqslant 0$ pour $x \in]-\infty;-5[\cup[4;+\infty[$

3 Les exercices

1. Résoudre dans $\mathbb{Q}$ les équations suivantes :
   (a) $2x+7=3x-8$
   (b) $2x+\sqrt{3}=x-7$
   (c) $2\sqrt{3}x+\sqrt{27}=\sqrt{3}$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$
   (a) $x^2=7$
   (b) $x^2+6x+9=13$
   (c) $x^2+8x+16=4x^2+12x+9$
   (d) $x^5=16x$
3. Résoudre :
   a. $\dfrac{(4x-1)(2x+3)^2}{x(7x+2)}<0$ b. $\dfrac{3x-1}{x+2}\leqslant\dfrac{5x+2}{2x+4}$ c. $\dfrac{3x-2}{5x+3}<1$
4. **QCM**

Questions	Réponses
1. L'équation $x^2=3-\pi$ a	☐ deux solutions ☐ aucune solution ☐ une solution
2. L'équation $(3x-4)(x-\sqrt{7})=0$ a dans l'ensemble $\mathbb{Q}$	☐ deux solutions ☐ aucune solution ☐ une solution
3. L'ensemble de solution de l'inéquation $x^2-16<0$ est	☐ $]-\infty;-4]\cup[4;+\infty[$ ☐ $[-4;4]$ ☐ $]-4,4[$
4. L'expression $A=(x^2+6x+9)(-x^2-4)$ est	☐ toujours positive ☐ toujours négative ou nulle ☐ toujours négative
5. L'ensemble de solution de l'inéquation $\dfrac{(x^2-2)(x^2+4)}{x^2+8\sqrt{7}}<0$ est	☐ $]-\infty,-2[\cup]2;+\infty[$ ☐ $]-\infty,-\sqrt{2}[\cup]-\sqrt{2};+\infty[$ ☐ $]-\sqrt{2};\sqrt{2}$

4 Les exercices corrigés

1. (a) $2x+7=3x-8 \Longleftrightarrow 2x-3x=-7-8 \Longleftrightarrow -x=-15 \Longleftrightarrow x=15$
   Soit $S_{\mathbb{Q}}=\{15\}$

   (b) $2x+\sqrt{3}=x-7 \Longleftrightarrow 2x-x=-7-\sqrt{3} \Longleftrightarrow x=-7-\sqrt{3}$
   Soit $S_{\mathbb{Q}}=\emptyset$

   (c) $2\sqrt{3}x+\sqrt{27}=\sqrt{3} \Longleftrightarrow 2\sqrt{3}x=\sqrt{3}-3\sqrt{3} \Longleftrightarrow 2\sqrt{3}x=-22\sqrt{3} \Longleftrightarrow x=-1$
   Soit $S_{\mathbb{Q}}=\{-1\}$

2. (a) $x^2=7 \Longleftrightarrow x=\sqrt{7}$ ou $x=-\sqrt{7}$
   Soit $S_{\mathbb{R}}=\{-\sqrt{7},\sqrt{7}\}$

   (b) $x^2+6x+9=13 \Longleftrightarrow (x+3)^2=13 \Longleftrightarrow x+3=\sqrt{13}$ ou $x+3=-\sqrt{13}$

   (c) $x^2+8x+16=4x^2+12x+9 \Longleftrightarrow (x+4)^2=(2x+3)^2 \Longleftrightarrow x+4=2x+3$ ou $x+4=-2x-3$
   Soit $S_{\mathbb{R}}=\{1;-\dfrac{7}{3}\}$

   (d) $x^5=16x \Longleftrightarrow x^5-16x=0 \Longleftrightarrow x(x^4-16)=0 \Longleftrightarrow x(x^2-4)(x^2+4)=0$
   Soit $x(x-2)(x+2)(x^2+4)=0$
   $S_{\mathbb{R}}=\{0;2;-2\}$

3. a. $\dfrac{(4x-1)(2x+3)š}{x(7x+2)}<0$
   On fait un tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{2}{7}$		0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x+3)š$		$+$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{4x-1}{7x+2}$		$+$		$+$	$\Vert$	$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{(4x-1)(2x+3)š}{x(7x+2)}$		$-$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

   Soit :

$$S=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[\cup\left]-\frac{3}{2},-\frac{2}{7}\right[\cup\left]0;\frac{1}{4}\right[$$

   b. $\dfrac{3x-1}{x+2}\leqslant\dfrac{5x+2}{2x+4}$ on obtient $\dfrac{3x-1}{x+2}-\dfrac{5x+2}{2x+4}\leqslant 0$
   Soit après réduction au même dénominateur : $\dfrac{x}{(x+2)(-x+7)}\leqslant 0$.
   Le dénominateur $2(x+2)^2$ est toujours positif ou nul donc il suffit que $x\leqslant 0$.
   On obtient : $S=]-\infty;0[$.

   c. $\dfrac{3x-2}{5x+3}<1 \quad\Longleftrightarrow\quad S=\left]-\infty;-\dfrac{5}{2};\right[\cup\left]-\dfrac{3}{5};+\infty\right[$

4. **QCM**

Questions	Réponses
1. L'équation $x^2 = 3-\pi$ a	☐ deux solutions ■ aucune solution ☐ une solution
2. L'équation $(3x-4)(x-\sqrt{7}) = 0$ a dans l'ensemble $\mathbb{Q}$	☐ deux solutions ☐ aucune solution ■ une solution
3. L'ensemble de solution de l'inéquation $x^2-16<0$ est	☐ $]-\infty;-4]\cup[4;+\infty[$ ☐ $[-4;4]$ ■ $]-4,4[$
4. L'expression $A=(x^2+6x+9)(-x^2-4)$ est	☐ toujours positive ■ toujours négative ou nulle ☐ toujours négative
5. L'ensemble de solution de l'inéquation $\dfrac{(x^2-2)(x^2+4)}{x^2+8\sqrt{7}}<0$ est	☐ $]-\infty,-2[\cup]2;+\infty[$ ☐ $]-\infty,-\sqrt{2}[\cup]-\sqrt{2};+\infty[$ ■ $]-\sqrt{2};\sqrt{2}$